

## Olimpiada Națională de Matematică

### Etapa Locală – Ilfov

#### Clasa a VIII - a

#### BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Nu se acorda puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

1.(7p) Dacă  $x \in [-4;5]$  și  $x+4-9y=0$  să se verifice dacă expresia  $E=\sqrt{(x+4)^2-y^2} + \sqrt{(x-5)^2-(y-1)^2}$  este constantă.

$$x+4=9y \Rightarrow (x+4)^2=81y^2$$

$$x \in [-4;5] \Rightarrow -4 \leq x \leq 5 \Rightarrow 0 \leq x+4 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq 9y \leq 9 \Rightarrow 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow |y|=y \dots\dots\dots 2p$$

$$x=9y-4 \Rightarrow x-5=9y-9 \Rightarrow x-5=9(y-1) \dots\dots\dots 1p$$

$$x \in [-4;5] \Rightarrow -4 \leq x \leq 5 \Rightarrow -9 \leq 9(y-1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq y-1 \leq 0 \Rightarrow |y-1|=1-y \dots\dots\dots 1p$$

$$E=\sqrt{81y^2-y^2} + \sqrt{81(y-1)^2-(y-1)^2} = 4\sqrt{5}|y| + 4\sqrt{5}|y-1| \dots\dots\dots 1p$$

$$E=4\sqrt{5}y + 4\sqrt{5}(1-y) = 4\sqrt{5} = \text{constantă} \dots\dots\dots 2p$$

2. Determinați cifrele  $a, b, x$ , astfel încât  $\overline{ab^2} = \overline{xxb}$  și  $\overline{ba^2} = \overline{bxx}$

G.M.NR. 11/2023

$a, b$  cifre;  $a, x, b \neq 0 \dots\dots\dots 1p$

$\overline{ab^2} = \overline{xxb} \Rightarrow$  ultima cifră a lui  $b$  este egală cu ultima cifră a lui  $b^2 \Rightarrow b \in \{1;5;6\} \dots\dots\dots 1p$

$\left. \begin{array}{l} \overline{ab^2} = 10\overline{xx} + b \\ \overline{ba^2} = 100b + \overline{xx} \end{array} \right\} \text{după eliminarea lui } \overline{xx} \Rightarrow \overline{ab^2} = 10(\overline{ba^2} - 100b) + b \dots\dots\dots 1p$

$$\Rightarrow 10a^2 - 20ab - 111b^2 + 111b = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$b=1 \Rightarrow a=2 \Rightarrow x=4 \text{ (convine)} \dots\dots\dots 1p$$

$$b=5 \Rightarrow \text{nu există număr natural } a \dots\dots\dots 1p$$

$$b=6 \Rightarrow \text{nu există număr natural } a \dots\dots\dots 1p$$

3. (7p) Fie paralelogramul  $ABCD$  cu  $\sphericalangle A=60^\circ$ ,  $AD=6\text{ cm}$ ,  $DB \perp AD$  și  $M$  mijlocul laturii  $AB$ . În punctul  $P$ ,  $DB \cap CM = \{P\}$ , se ridică perpendiculară  $PQ$  pe planul paralelogramului  $ABCD$ , astfel încât  $PQ=2\sqrt{6}\text{ cm}$ .

a)(3p) Aflați aria paralelogramului  $ABCD$

b)(4p) Calculați distanța de la punctul  $Q$  la dreapta  $BC$ .

$$a) \triangle ADB, \sphericalangle B=60^\circ, \sphericalangle ADB=90^\circ, \cos 60^\circ = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{AB} \Rightarrow AB=12\text{ cm} \dots\dots\dots 1p$$

$$A_{ABCD} = AD \cdot AB \cdot \sin 60^\circ = 36\sqrt{3}\text{ cm}^2 \dots\dots\dots 2p$$

$$b) A_{\triangle CMB} = \frac{A_{\triangle ABC}}{2} = \frac{A_{ABCD}}{4} = 9\sqrt{3}\text{ cm}^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$A_{\Delta CMB} = A_{\Delta MBP} + A_{\Delta BPC} \Rightarrow 9\sqrt{3} = \frac{MB \cdot BP \cdot \sin 30^\circ}{2} + \frac{PB \cdot BC}{2} \Rightarrow BP = 2\sqrt{3} \text{ cm} \dots 1p$$

$$CP^2 = BC^2 + PB^2 \Rightarrow CP = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$QP \perp (ABC)$$

$$PB \perp BC$$

$$PB, BC \subset (ABC)$$

$$QB^2 = QP^2 + PB^2 \Rightarrow QB = 6 \text{ cm} \dots 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} QP \perp (ABC) \\ PB \perp BC \\ PB, BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \xrightarrow{T_3 \perp} QB \perp BC \Rightarrow d(Q; BC) = QB \dots 1p$$

4. (7p). În vârful  $A$  al pătratului  $ABCD$  se ridică perpendiculara  $AA'$  pe planul său. Dacă  $M$  este piciorul perpendicularei din  $B$  pe  $A'C$  și  $AA' = AB = a$ . Să se determine:

a) (4p) măsura unghiului format de dreapta  $BM$  cu planul  $(A'OM)$ , unde  $O$  este centrul pătratului  $ABCD$ .

G.M. NR.2/2024

$$AA' \perp (ABC)$$

$$AB \perp BC$$

$$AB, BC \subset (ABC)$$

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp (ABC) \\ AB \perp BC \\ AB, BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \xrightarrow{T_3 \perp} A'B \perp BC \Rightarrow \Delta A'BC \text{ dreptunghic în } B \dots 1p$$

$$BM = \frac{AA' \cdot BC}{A'C} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$BD \perp AC$$

$$BD \perp AA'$$

$$AA' \cap AC = \{A\}$$

$$\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \\ AA' \cap AC = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (AA'C) \Rightarrow pr_{BM}(ABC) = OM \dots 1p$$

$$\sphericalangle(BM, (AA'C)) = \sphericalangle(BM, OM) = \sphericalangle OMB \dots 1p$$

$$\Delta MBO, \sin \sphericalangle OMB = \frac{BO}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sphericalangle OMB = 60^\circ \dots 1p$$

b) distanța dintre dreptele  $A'C$  și  $BD$

$$\text{cf. a) } BO \perp (AA'C) \Rightarrow BO \perp CA'$$

$$\text{dar } MB \perp CA'$$

$$MB \cap BO = \{B\}$$

$$\left. \begin{array}{l} BO \perp (AA'C) \Rightarrow BO \perp CA' \\ MB \perp CA' \\ MB \cap BO = \{B\} \end{array} \right\} \Rightarrow CA' \perp (BOM) \Rightarrow CA' \perp OM \dots 1p$$

$$CA' \perp OM$$

$$OM \perp DB$$

$$\left. \begin{array}{l} CA' \perp OM \\ OM \perp DB \end{array} \right\} \Rightarrow d(A'C \text{ și } BD) = OM \dots 1p$$

$$\Delta MBO \xrightarrow{TP} OM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$